ЛЕКЦИЯ-3

2. *Қайталанған ядролар және резольвента.* Әдетте, жуықтау формуласында бастапқы жуықтау ретінде бос мүше $f(x)$ функциясын қабылдайды, яғни $\varphi_0 = f(x)$. Сонда рекуррентті формуладан жуықтау тізбегінің мүшелері

$$\varphi_1(x) = f(x) + \int_a^b K(x,s) f(s) ds \equiv (I + \lambda \mathrm{K}) f,$$

$$\varphi_2(x) = (I + \lambda \mathrm{K})^2 f = f + \lambda \mathrm{K} f + \lambda^2 \mathrm{K}^2 f, \ldots,$$

$$\varphi_n(x) = (I + \lambda \mathrm{K})^n f = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m \mathrm{K}^m f,$$

теңдіктерімен анықталады. Мұнда, $I -$бірлік оператор, $\mathrm{K} f = \int_a^b K(x,s) f(s) ds,$ ал K^m операторы K -ның m дәрежесі.

K операторы дәрежелерін $K(x,s)$ ядросы арқылы көрейік. Анықтама бойынша $\mathrm{K}^2 f = \mathrm{K}(\mathrm{K} f) = \int_a^b K(x,t) \left\{ \int_a^b K(t,s) f(s) ds \right\} dt = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x,t) K(t,s) dt \right\} f(s) ds,$

Егер

$$K_2(x,s) = \int_a^b K(x,t) K(t,s) dt$$

деп белгілесек, онда

$$\mathrm{K}^2 f = \int_a^b K_2(x,s) f(s) ds,$$

сол сияқты

$$\mathrm{K}^3 f = \mathrm{K}(\mathrm{K}^2 f) = \int_a^b K(x,t) \left\{ \int_a^b K_2(t,s) f(s) ds \right\} dt = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x,t) K_2(t,s) dt \right\} f(s) ds.$$

Егер

$$K_3(x,s) = \int_a^b K(x,t) K_2(t,s) dt$$

деп белгілесек, онда $\mathrm{K}^3 f = \int_a^b K_3(x,s) f(s) ds.$

Жалпы жағдайда, математикалық индукция заңымен

$$\mathrm{K}^n f \equiv \int_a^b K_n(x,s)\, f(s)ds.$$

K^n операторын теңдігімен анықтауға болады, мұнда,

$$K_n(x,s) = \int_a^b K(x,t) K_{n-1}(t,s)dt. \qquad (21)$$

(21) формуласымен анықталған $K_n(x,s)$ функциясы $n-$ қайталанған ядро немесе ядроның $n-$интеграциясы деп аталады. Келешекте $K_1(x,s) = K(x,s)$ деп қабылдаймыз. Оператор үшін белгілі $\mathrm{K}^{n+m} = \mathrm{K}^n(\mathrm{K}^m) = \mathrm{K}^m(\mathrm{K}^n)$ теңдігінен қайталанған ядролар үшін орындалатын

$$K_{n+m}(x,s) = \int_a^b K_n(x,t) K_m(t,s)dt = \int_a^b K_m(x,t) K_n(t,s)dt$$

теңдігін алуға болады.

Ескерте кетейік, егер $D = \{a \le x, s \le b\}$ облысында $K(x,s)$ ядросы үзіліссіз функция болса, онда барлық қайталанған ядролар да $D = \{a \le x, s \le b\}$ облысында үзіліссіз функциялар болатыны көрініп тұр.

Қарастырылып отырған Фредгольм теңдеуінің шешімі

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

болғандықтан

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \mathrm{K}^m f = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b K_m(x,s)\, f(s)ds \qquad (22)$$

формуласын аламыз. (22) теңдеуінің оң жағында тұрған қатардың $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ шарты орындалғанда бірқалыпты жинақты болатынына көз жеткізу қиын емес. Әдетте оны Нейман қатары деп атайды. Жоғарыда алынған тұжырымдардың қорытындысы келесі тұжырымды береді.

2 теорема. Егер $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$, $f \in C[a,b]$, $K(x,s) \in C(D)$ болса, онда кез келген 2-текті Фредгольмнің теңдеуінің $C[a,b]$ кеңістігінде жататын жалғыз шешімі бар болады және ол шешім (22) формуласымен өрнектеледі. Яғни $|\lambda| \le \dfrac{1}{M(b-a)}$ дөңгелегінің ішінде $(I - \lambda\mathrm{K})$ операторына шенелген кері оператор $(I - \lambda\mathrm{K})^{-1} = I + \lambda\mathrm{K} + \lambda^2\mathrm{K}^2 + \ldots + \lambda^n\mathrm{K}^n + \ldots$ формуласымен анықталады.

Шынында,

$$(I-\lambda \mathrm{K})(I-\lambda \mathrm{K})^{-1}=(I-\lambda \mathrm{K})(I+\lambda \mathrm{K}+\lambda^2 \mathrm{K}^2+\ldots)=$$
$$I+\lambda \mathrm{K}+\lambda^2 \mathrm{K}^2+\ldots-\lambda \mathrm{K}-\lambda^2 \mathrm{K}^2-\ldots=I.$$

Енді

$$K_1(x,s)+\lambda K_2(x,s)+\lambda^2 K_3(x,s)+\ldots+\lambda^{n-1}K_n(x,s)+\ldots$$

функционалдық қатарын қарастырайық. Егер де $|\lambda|\le \dfrac{1}{M(b-a)}$ болса, онда бұл қатар $D=\{a\le x,s\le b\}$ облысында бірқалыпты жинақты. Осы қатардың қосындысын

$$R(x,s;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,s) \qquad (23)$$

ядроның резольвентасы немесе шешетін ядросы деп атайды. Резольвента $R(x,s;\lambda)$ бірқалыпты жинақталатын функциялық қатардың қосындысы болғандықтан, x, s аргументтері бойынша үзіліссіз, ал λ аргументі бойынша $|\lambda|\le \dfrac{1}{M(b-a)}$ облысында аналитикалық функция екені айқын. Егер (23) теңдігінің екі жағында $f(s)$ функциясына көбейтіп, s бойынша a мен b аралығында интеграл алсақ, онда

$$\int_a^b R(x,s;\lambda)f(s)ds=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}\int_a^b K_n(x,s)f(s)ds \qquad (24)$$

теңдігін аламыз. Енді (22) мен (24) теңдіктерін салыстырсақ,

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)f(s)ds \qquad (25)$$

формуласы шығады. Егер бос мүше $f\in C[a,b]$ болса, онда (25) формуласымен анықталатын $\varphi\in C[a,b]$ Фредгольм теңдеуінің шешімін аламыз.

3 теорема. Егер алдыңғы теореманың шарттары орындалса, онда (20) теңдеуінің шешімі (25) формуласымен анықталады.

1 ескерту. (25) формуласы λ параметрінің өте кіші (аз) мәндерінде ғана орындалатынын дәлелдедік, келешекте (25) формуласы λ параметрінің үлкен мәндерінде орындалатыны көрсетіледі. (25) формуласы λ-ның кез келген мәндеріне орындалатындай ядролар да бар.

Мысалы, егер ядро өзіне-өзі ортогональ, яғни

$$\int_a^b K(x,s)K(s,x)ds=0$$

болса, онда $K_2(x,s)=0,$ жалпы $K_n(x,s)=0,\ \forall x,s.$ Бұл жағдайда $R(x,s;\lambda)=K(x,s)$ λ-ға тәуелді емес.

2 ескерту. Резольвента $R(x,s;\lambda)$ интегралдық теңдеулерді

$$R(x,s;\lambda)=K(x,s)+\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)K(t,x)dt$$

қанағаттандырады. Бұның дұрыстығын (21) мен (23) формулаларын пайдаланып, дәлелдеуге болады.

Мысалдар.

1. Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуі үшін $K(x,s)=e^x\sin s,$ $0\le x,s\le\pi$ ядросының қайталанған ядроларын табу керек.

Шешуі. $K_1(x,s)=K(x,s)=e^x\sin s,\ K_2(x,s)=\int_0^\pi e^{x+t}\sin t\sin s\,dt=\dfrac{e^\pi+1}{2}e^x\sin s,$ $K_3(x,s)=\int_0^\pi K(x,t)K_2(t,s)dt=\dfrac{(e^\pi+1)^2}{2}e^x\sin s,\ K_n(x,s)=\dfrac{(e^\pi+1)^{n-1}}{2}e^x\sin s,\ldots.$

2. Резольвентаны пайдаланып, мына интегралдық теңдеуді шешу керек:

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 xe^{-2s}\varphi(s)ds+e^x.$$

Шешуі. Алдымен ядросы $K(x,s)=xe^{-2s}$ резольвентасын табайық:

$$K_1(x,s)=K(x,s)=xe^{-2s},\quad K_2(x,s)=\int_0^1 xe^{-2t}te^{-2s}dt=\frac{1}{4}(1-3e^{-2})xe^{-2s},$$

$$K_3(x,s)=\int_0^1 xe^{-2t}\frac{1}{4}(1-3e^{-2})te^{-2s}dt=\left(\frac{1-3e^{-2}}{4}\right)^2 xe^{-2s},\quad K_n(x,s)=\left(\frac{1-3e^{-2}}{4}\right)^{n-1}xe^{-2s},\ldots.$$

Олай болса,

$$R(x,s;\lambda)=xe^{-2s}\left(1+\lambda\frac{1-3e^{-2}}{4}+\lambda^2\left(\frac{1-3e^{-2}}{4}\right)^2+\ldots+\lambda^{n-1}\left(\frac{1-3e^{-2}}{4}\right)^{n-1}+\ldots\right).$$

Енді $|\lambda|\cdot\left|\dfrac{1-3e^{-2}}{4}\right|<1$немесе $|\lambda|<\dfrac{4e^2}{e^2-3}$ болса, онда $R(x,s;\lambda)=\dfrac{xe^{-2s}}{1-\lambda\dfrac{1-3e^{-2}}{4}}.$

Демек, берілген интегралдық теңдеудің шешімі

$$\varphi(x)=e^x-\frac{\lambda x}{1-\lambda\dfrac{1-3e^{-2}}{4}}\int_0^1 e^{-s}\varphi(s)ds.$$

3. Енді (20) теңдеуді $L_2[a,b]$ кеңістігінде қарастырайық. Біз $L_2[a,b]$ кеңістігінің метрикасын

$$\rho_{L_2}(\varphi_1,\varphi_2)=\left(\int_a^b|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

формуласы мен анықталатынын білеміз. $L_2[a,b]$ кеңістігінде $C[a,b]$-ға қарағанда параметр λ-ның үлкен мәндерінде шешімнің бар екенін көрсетуге болады.

2 лемма. Егер ядро $K(x,s)\in C(D)$ болса, онда К операторы

$$\forall\varphi(t)\in L_2[a,b]\xrightarrow{\mathrm{K}}\psi(x)\equiv\mathrm{K}\varphi\in C[a,b].$$

Дәлелдеуі. $x_0\in[a,b]$ нүктесі берілсін. $K(x,s)$ ядросы үзіліссіз функция болғандықтан кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін сәйкес $\delta>0$ саны табылып:

$$|x-x_0|<\delta\Rightarrow|K(x,s)-K(x_0,s)|<\frac{\varepsilon}{c},\ \forall s\in[a,b].$$

Сондықтан, Коши-Буняковский теңсіздігін

$$|\psi(x)-\psi(x_0)|=\left|\int_a^b[K(x,s)-K(x_0,s)]\varphi(s)ds\right|\leq\frac{\varepsilon}{c}\int_a^b|\varphi(s)|ds\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{c}\sqrt{b-a}\left(\int_a^b|\varphi(s)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon,$$

яғни $\psi(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз. x_0 кез келген нүкте болғандықтан $\psi(x)$ функциясы $[a,b]$ -да үзіліссіз. Осыдан, егер $f\in C[a,b]$ және $K(x,s)\in C[a,b]$ болса, (20) теңдеуінің оң жағы кез келген $\varphi\in L_2[a,b]$ үшін, үзіліссіз функция екені шығады. Яғни сол жағында тұрған: $\varphi\in C[a,b]$ Демек, $L_2[a,b]$ кеңістігінде жататын функциялар ішінен тек үзіліссіз функциялар ғана шешім болады деген қорытынды шығады.Дәлелдеген лемма бойынша

$$L_2[a,b]\xrightarrow{\mathrm{K}}C[a,b]\subset L_2[a,b].$$

3 лемма. Егер

$$B=\left(\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)dsdx\right)^{\frac{1}{2}}=\|K\|$$

деп белгілесек, онда К операторы параметрдің $|\lambda|<\frac{1}{B}$ мәндерінде қысу операторы болады. Шынында да,

$$\mathrm{K}\varphi_1 - \mathrm{K}\varphi_2 = \lambda\int_a^b K(x,s)[\varphi_1(s) - \varphi_2(s)]ds$$

болғандықтан, Коши-Буняковский теңсіздігін пайдаланып

$$|\mathrm{K}\varphi_1 - \mathrm{K}\varphi_2|^2 \le \lambda^2\int_a^b K^2(x,s)ds\int_a^b[\varphi_1(s) - \varphi_2(s)]^2 ds$$

теңсіздігін аламыз. Енді осы соңғы алынған теңсіздіктің екі жағында x бойынша a мен b аралығында интегралдасақ

$$\int_a^b|\mathrm{K}\varphi_1 - \mathrm{K}\varphi_2|^2 dx \le \lambda^2\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)dsdx\int_a^b|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|^2 ds$$

немесе

$$\rho_{L_2}^2(\mathrm{K}\varphi_1, \mathrm{K}\varphi_2) \le \lambda^2 B^2 \rho_{L_2}^2(\varphi_1, \varphi_2)$$

теңсіздігі шығады.Осыдан

$$\rho_{L_2}(\mathrm{K}\varphi_1, \mathrm{K}\varphi_2) \le |\lambda| \cdot B \cdot \rho_{L_2}(\varphi_1, \varphi_2) \tag{26}$$

(26) теңсіздігінен оператор $|\lambda| \cdot B < 1$ болғанда ғана қысу операторы болады.

Қысып – бейнелеу принципінен (20) теңдеуінің жалғыз ғана шешімі болуы үшін теңсіздігі $|\lambda| < \frac{1}{B}$ орындалуы керек. Расында $B \le M(b-a)$ болғандықтан $|\lambda| < \frac{1}{B}$ облысының $\lambda < \frac{1}{M(b-a)}$ облысынан кең екені шығады. Бірақ $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ облысында жуықтайтын тізбек интегралдық теңдеудің шешіміне бірқалыпты жинақты да, ал $\frac{1}{M(b-a)} < |\lambda| < \frac{1}{B}$ облысында бұл тізбек орташа жинақталатынын айтуға болады.

4. $K(x,s) \in L_2(D)$ болсын. Сонда келесі тұжырым орынды.

4 лемма. Егер $K\varphi = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$ интегралындағы $\varphi(x) \in L_2[a,b]$ болса, онда ол интеграл (a,b) интервалының барлық нүктелерінде дерлік бар және $K\varphi \in L_2(a,b)$ болады.

Дәлелдеуі. $|K(x,s)\varphi(s)| \le 0,5K^2(x,s) + 0,5\varphi^2(s)$ теңсіздігі әрқашан орынды. (26) теңсіздігінің оң жағының бірінші қосылғышы s айнымалысы бойынша барлық $x \in [a,b]$ үшін дерлік, ал екінші қосылғыш $[a,b]$ кесіндісінде s бойынша интегралданады. Міне бұдан $K(x,s)\varphi(s)$ функциясы барлық

$x \in [a,b]$ үшін дерлік s айнымалысы бойынша интегралданады, яғни $\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$ интегралы барлық жағдайда дерлік анықталған. Коши–Буняковский теңсіздігі бойынша

$$|K\varphi|^2 \le \int_a^b |K(x,s)|^2 ds \int_a^b |\varphi(s)|^2 ds = \|\varphi\|^2 \int_a^b |K(x,s)|^2 ds$$

қатысы орынды, ал бұдан

$$\int_a^b |K\varphi|^2 dx \le \|\varphi\|^2 \int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dsdx < \infty,$$

яғни $K\varphi(x) \in L_2(a,b)$ екені шығады. Демек, лемма дәлелденді, яғни

$$\|\mathrm{K}\varphi\|_{L_2(a,b)} \le B\|\varphi\|_{L_2(a,b)}. \tag{27}$$

5 лемма. Фредгольмдік операторлардың көбейтіндісі де фредгольмдік оператор болады.

Дәлелдеуі. $K(x,s), N(x,s) \in L_2(D)$ болсын. Бұлардан:

$$NK\varphi = \int_a^b N(x,s)\left(\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt\right)ds.$$

Әрине, бұл өрнектің оң жағындағы $\varphi(t) \in L_2[a,b]$ болса, онда теңдіктегі қайталанған интегралдар анықталады. Олай болса, Фубини теоремасы бойынша $NK\varphi = \int_a^b \varphi(t)dt \int_a^b N(x,s)K(s,t)ds = \int_a^b \left\{\int_a^b N(x,t)K(t,s)dt\right\}\varphi(s)ds.$

Егер $M(x,s) = \int_a^b N(x,t)K(t,s)dt$ деп белгілесек, онда:

$$N\mathrm{K}\varphi = \int_a^b M(x,s)\varphi(s)ds. \tag{28}$$

Енді $M(x,s) \in L_2(D)$ екенін көрсетейік. Коши–Буняковский теңсіздігі бойынша

$$|M(x,s)|^2 \le \int_a^b |N(x,t)|^2 dt \int_a^b |K(t,s)|^2 dt$$

теңсіздігі орынды. Бұл теңсіздіктің екі жағын D төртбұрышы бойынша интегралдап,

$$\int_a^b\int_a^b |M(x,s)|^2\,dxds \le \int_a^b\int_a^b |N(x,t)|^2\,dtdx\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|\,dtds \le BB^2, \quad (29)$$

демек, $M(x,s)\in L_2(D)$. Олай болса, NK операторы фредгольмдік оператор болады.

3 ескерту. Жалпы жағдайда фредгольмдік операторларды көбейту амалында орын ауыстыру заңы әрқашан орынды бола бермейді.

Мәселен, $K(x,s)=1,\ N(x,s)=x-s,\ \ a=0,\ b=1$ болсын. Сонда

$$NK\varphi=\int_0^1 (x-\frac{1}{2})\varphi(s)ds, \quad KN\varphi=\int_0^1 (\frac{1}{2}-S)\varphi(s)ds.$$

4 ескерту. Егер $K(x,s),\ N(x,s)\in L_2(D)$ болса, онда (28) өрнегіндегі $M(x,s)\in L_2(D)$ болады. Расында, егер

$$B_n^2=\int_a^b\int_a^b |K_n(x,s)|^2\,dxds$$

деп белгілесек (мұндағы, $K_n(x,s)$ - n - қайталанған ядро), онда

$$K_n(x,s)=\int_a^b K_{n-1}(x,t)K(t,s)dt.$$

Жоғарыдағы (29) теңсіздігін $N(x,s)=K_{n-1}(x,s)$ үшін пайдалансақ: $B_n^2\le B^2B_{n-1}^2$, ал бұдан $B_n^2\le B^4B_{n-2}^2\le\ldots\le B^{2n}$ немесе $B_n\le B^n$. Сондықтан (27) теңсіздігін ескеріп,

$$\left\|K^n\varphi\right\|_{L_2}\le B_n\left\|\varphi\right\|_{L_2}\le B^n\left\|\varphi\right\|_{L_2} \quad (30)$$

шартын аламыз.

Егер $K(x,s)\in L_2(D)$ шарты орындалса, онда 4 ескерту бойынша ол ядроның қайталанған ядросы да сол шартты қанағаттандырады.

Егер

$$A_n=\sup_x\int_a^b |K_n(x,s)|^2\,ds$$

деп белгілесек, онда

$$\int_a^b |K_n(x,s)|^2 ds \le \int_a^b \left\{ \int_a^b K_{n-1}(x,t)K(t,s) \right\}^2 ds \le B_n^2 .$$

Ал $\int_a^b |K_{n-1}(x,s)|^2 ds \le A_{n-1}$ болғандықтан соңғы теңсіздіктен

$$A_n \le B^2 A_{n-1} \le ... \le AB^{2n-2} \text{ және } \int_a^b |K_n(x,s)|^2 ds \le AB^{2n-2} \tag{31}$$

теңсіздігі шығады.

4 теорема. Егер

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds + f(x)$$

Фредгольм теңдеуіндегі $K(x,s) \in L_2(D)$ және $|\lambda| < \frac{1}{B}$ болса, онда ол теңдеу үшін түзілген Нейман қатары теңдеудің шешіміне $\varphi(x) \in L_2(a,b)$ орташа жинақты.

Дәлелдеуі. $\sum_{m=n+1}^{n+p} \lambda^m K^m f$ қатар үшін үшбұрыштар теңсіздігі мен жоғарыдағы (30) өрнегін пайдаланып, мынаны аламыз:

$$\left\| \sum_{m=n+1}^{n+p} \lambda^m K^m f \right\| \le \sum_{m=n+1}^{n+p} |\lambda|^m \left\| K^m f \right\| \le \|f\| \sum_{m=n+1}^{n+p} \left(|\lambda| B\right)^m \le \|\varphi\| \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(|\lambda| B\right)^m = \|\varphi\| \frac{\left(|\lambda| B\right)^{n+1}}{1-|\lambda| B}.$$

Егер n саны жеткілікті дәрежеде үлкен болса, онда теңсіздіктің оң жағы өте аз шама болады. Демек қалдық мүшесі $\sum_{m=n+1}^{n+p} \lambda^m K^m f$ болған қатар жинақты, олай болса, жоғарыдағы Фредгольм теңдеуі үшін алынған Нейман қатары интегралданатын $\varphi(x)$ функциясына жинақты. Сонымен $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0,\ n \to \infty$. Енді шектік функция $\varphi(x)$ Фредгольм теңдеуін қанағаттандыратынын көрсетейік. Ол үшін $K\varphi_{n-1} \to K\varphi,\ n \to \infty$ екенін, яғни орташа жинақты екенін көрсетсек жеткілікті. Бұл оңай дәлелденеді, себебі $n \to \infty$ жағдайда $\|K\varphi_{n-1} - K\varphi\| \le \|K(\varphi_{n-1} - \varphi)\| \le B\|\varphi_{n-1} - \varphi\| \to 0$.

5 теорема. Егер $K(x,s) \in L_2(D)$ шартына қосымша $|K(x,s)| \le M$ шарты да орындалса, онда Нейман қатары $[a,b]$ кесіндіде бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі. Нейман қатарының жалпы мүшесін бағалайық:

$$\left|\lambda^m K^m \varphi\right| = |\lambda|^m \int_a^b | K_m(x,s) f(s) ds | \le |\lambda|^m \| f \| \left\{ \int_a^b |K_m(x,s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Егер (31) теңсіздігін пайдалансақ,

$$\left|\lambda^m K^m \varphi\right| \le \frac{\sqrt{A}}{B} \| f \| \left(|\lambda| B\right)^m$$

теңсіздігі шығады, оның оң жағында еселігі $|\lambda| B < 1$ болатын геометриялық прогрессияның жалпы мүшесі. Вейерштрасс теоремасы бойынша: жалпы мүшесі осындай қасиетке ие қатар, бірқалыпты жинақты. Теорема дәлелденді.

5. *Енді көпөлшемді интегралдық теңдеулерге жоғарыдағы келтірілген теорияларды қолданайық.* Көпөлшемді Фредгольм теңдеуіне де қысып бейнелеу әдісі орынды.

$$\varphi(x) = \lambda \int_D K(x,\xi) \varphi(\xi) d\xi + f(x) \qquad (32)$$

теңдеуінде D шенелген немесе R^n-дегі шенелмеген облыс, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ ал оның ядросы $K(x,s)$ $D \times D$ облысында үзіліссіз немесе $K(x,\xi) \in L_2(D \times D)$, яғни

$$\int_D \int_D |K(x,\xi)|^2 d\xi dx = B^2 = const < \infty$$

болсын. Жоғарыдағы шенелгендік шарты көпаргументті функция үшін

$$\int_D |K(x,\xi)|^2 d\xi < A = const$$

түрінде жазылады. (32) теңдеудің ядросы соңғы екі шарттарды қанағаттандырса, теңдеу үшін жоғарыдағы тұжырымдар орынды екенін дәлелдеу қиын емес.

Егер $|\lambda| < \frac{1}{B}$ болса, онда (32) теңдеу біртіндеп жуықтау әдісімен шешіледі және оның шешімі жалғыз болады. Бұл әдістегі қайталанушы ядролар $K_1(x,s) = K(x,s)$, $K_2(x,s) = \int_D K_1(x,\eta) K(\eta,s) d\eta, \ldots, K_n(x,s) = \int_D K_{n-1}(x,\eta) K(\eta,s) d\eta$ өрнектермен анықталады да теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_D R(x,\xi;\lambda) f(\xi) d\xi$$

түрінде табылады, мұндағы, $R(x,\xi,\lambda)$ $K(x,\xi)$ ядросының резольвентасы: $R(x,\xi;\lambda) = K_1(x,\xi) + \lambda K_2(x,\xi) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x,\xi) + \ldots$. Егер $K(x,\xi) \in C(D \times D)$, $D -$

шектелген облыс болса, бұл қатар $|\lambda| < \dfrac{1}{MD}$ болғанда бірқалыпты жинақты, ал $R(x,\xi,\lambda)$ үзіліссіз функциялық қатардың шегі ретінде үзіліссіз функция.

6. *Интегралдық теңдеулер жүйесі.* Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеулері жүйесі

$$\varphi_i(x) = \lambda \sum_{j=1}^{m} \int_a^b K_{ij}(x,s)\varphi_j(s)ds + f_i(x),\ i = 1,2,\ldots,m \tag{33}$$

түрінде болады. Бұл жүйенің ядролары $K_{ij}(x,s) \in L_2(D)$, ал бос мүшелері $f_i \in L_2(a,b)$ болсын. Осы жүйенің шешімі болатын $\varphi_i(x)$ функциялары $L_2(a,b)$ кеңістігінен ізделеді. Бұл теңдеулер жүйесі үшін жоғарыдағы тұжырымдар толық түрде орынды. Ал $|\lambda| \langle \dfrac{1}{B}$ теңсіздігіндегі B үшін:

$$B^2 = \sum_{ij=1}^{m} \int_a^b \int_a^b |K_{ij}(x,s)|^2 dxds$$

және $K_{ij}(x,s)$ ядролары үшін

$$\int_a^b |K_{ij}(x,s)|^2 ds \le A_{ij} = const$$

шарттар орындалса, онда (33) жүйе біртіндеп жуықтау әдісі арқылы шешіледі. Ол жуықтап шешу үдерісі бірқалыпты жинақты. Бұған біз толық тоқталмаймыз, себебі жүйені Фредгольмнің 2-текті бір теңдеуіне келтіруге болады. Бірақ ол теңдеу тек бір интеграл үшін емес, одан m есе кең облыста қарастырылады.

$a < x \le a + m(b-a)$ аралығында $\Phi(x)$ пен $F(x)$ функцияларын $a + (i-1)(b-a) \le t \le a + i(b-a)$ болғанда

$$\Phi(x) = \varphi_i(x - (i-1)(b-a)),\ F(x) = f_i(x - (i-1)(b-a)),\ i = 1,2,\ldots,m$$

түрінде анықтап, ал $K(x,s)$ ядросын $Q_m = \{a \le x, s \le a + m(b-a)\}$ облысында $a + (i-1)(b-a) \le x \le a + i(b-a);\ a + (j-1)(b-a) \le s \le a + j(b-a);$ болғанда

$$K(x,s) = K_{ij}(x - (i-1)(b-a), s - (j-1)(b-a)),\ i,j = 1,2,\ldots,m$$

арқылы өрнектеп, (33) теңдеулер жүйесін

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^{a+b(b-a)} K(x,s)\Phi(s)ds + F(x)$$

жазсақ, онда біз құрған $K(x,s)$ ядросы $Q_m -$де интегралданады, ал $F(x) \in L_2(a, a + m(b-a))$ болады. Шынында да,

$$\int_a^{a+m(b-a)} |F(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^{m} \int_a^{a+i(b-a)} |F(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^{m} \int_a^{a+i(b-a)} | f_i(x-(i-1)(b-a)|^2 dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_a^{b} | f_i(x)|^2 dx < \infty.$$

Дәл осылай, $\int_a^{a+ma} \int_a^{a+m(b+a)} |K(x,s)|^2 dsdx = \sum_{i,j=1}^{m} \int_a^{a+i(b-a)} \int_a^{a+i(b-a)} |K_{ij}(x,s)|^2 dsdx = B^2 < \infty.$

§3.3. Қысып бейнелеу әдісін Вольтерра теңдеуіне және сызықтық емес интегралдық теңдеулерге қолдану

1. Вольтерраның

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) \tag{34}$$

теңдеуін қарастырайық. Біз жоғарыда Вольтерра теңдеуі Фредгольм теңдеуінің дербес түрі болғандықтан $K(x,s)$ ядросын $s > x$ болғанда $K(x,s) = 0$ деп анықтап, Фредгольм теңдеуіне келтіруге болатынын айтқанбыз. Бірақ Вольтерра теңдеуі үшін қысып бейнелеу әдісі параметр λ-ның барлық мәндері үшін орынды. Сондықтан Вольтерра теңдеуіне арнайы тоқталамыз.

6 теорема. K опеаторы толық метрикалық X кеңістігін өзіне үзіліссіз бейнелесін және $H = H^n$ операторы n-нің кейбір мәндерінде қысу операторы болсын. Бұл жағдайда $\mathrm{K}x = x$ теңдеуінің жалғыз ғана шешімі бар болады.

Расында, x_0 нүктесі H операторының қозғалмайтын нүктесі, яғни $x = Hx$ теңдеуін қанағаттандырса, онда $\mathrm{K}x = \mathrm{K}(H^k x) = H^k \mathrm{K}x = H^k x_0 \to x,\ k \to \infty$ болады, себебі H операторының қозғалмайтын x нүктесіне жинақты. Демек $\mathrm{K}x = x$ қозғалмайтын нүкте ол жалғыз. Себебі K операторының қозғал-майтын нүктесі K^n қысу операторының да қозғалмайтын нүктесі. Егер $K(x,s)$ пен $f(x)$ үзіліссіз функциялар болса, онда:

$$\mathrm{K}\varphi = \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x)$$

операторы $C[a,b]$ кеңістігін қайтадан $C[a,b]$-ға үзіліссіз бейнелейтінін көрсету оңай.

$$M = \max_{x,s} |K(x,s)|,\quad a \le x \le b,\ a \le s \le x$$

деп белгілейік. Сонда:

$$|\mathrm{K}\varphi_2-\mathrm{K}\varphi_1|=\left|\lambda\int_a^x K(x,s)[\varphi_2(s)-\varphi_1(s)]ds\right|\le|\lambda|M(b-a)\rho(\varphi_1,\varphi_2),$$

$$|\mathrm{K}^2\varphi_2-\mathrm{K}^2\varphi_1|=\left|\lambda\int_a^x K(x,s)[\mathrm{K}\varphi_2-\mathrm{K}\varphi_1]ds\right|\le$$

$$\le\frac{\lambda^2}{2!}\cdot M^2(x-a)^2\rho(\varphi_2,\varphi_1)$$

және жалпы жағдайда

$$|\mathrm{K}^n\varphi_2-\mathrm{K}^n\varphi_1|\le|\lambda|^n\frac{M^n(x-a)^n}{n!}\rho(\varphi_2,\varphi_1).$$

Сонымен $\rho(\mathrm{K}^n\varphi_2,\mathrm{K}^n\varphi_1)\le\dfrac{|\lambda|^n M^n(b-a)^n}{n!}\rho(\varphi_2,\varphi_1).$

Міне, бұдан K операторы мен оның K^n дәрежесі операторлары элементтерді $C[a,b]$-дан $C[a,b]$-ға сәйкестендіруші үзіліссіз операторлар екенін көреміз. Оның үстіне соңғы теңсіздіктегі λ сейкес n санын $|\lambda|^n M^n(b-a)^n<1$ теңсіздігін қанағаттандыратындай етіп таңдап алуға болады. Демек, K^n операторы үшін жеткілікті дәрежедегі n үшін қысу операторы болады.

Осы дәлелденген теоремадан K операторының жалғыз ғана қозғалмайтын нүктесі бар болатынын білеміз. Демек, (34) Вольтерраның интегралдық теңдеуінің кез келген λ саны үшін жалғыз шешімі бар болады. Ол

$$\varphi_{n+1}(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)\varphi_n(s)ds+f(x),\ \ n=0,1,2,\ldots$$

тізбегінен біртіндеп жуықтау әдісімен табылады. Бұл әдістегі нөлдік жуықтау үшін $C[a,b]$ жататын кез келген функцияны алуға болады. Егер $\varphi_0(x)=f(x)$ деп алсақ, онда алдыңғы теңдіктен

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,s)f(s)ds=(I+\lambda\mathrm{K})f,\ \varphi_2(x)=(I+\lambda\mathrm{K})^2 f=I+\lambda\mathrm{K}f+\lambda^2\mathrm{K}^2 f,\ldots,$$

$$\varphi_n(x)=(I+\lambda\mathrm{K})^n f=I+\lambda\mathrm{K}f+\lambda^2\mathrm{K}^2 f+\ldots.$$

K операторының дәрежесін қайталанатын ядролар арқылы анықтайық:

$$\mathrm{K}^2 f=\mathrm{K}(\mathrm{K}f)=\int_a^x K(x,t)\left(\int_a^t K(t,s)f(s)ds\right)dt=$$

$$=\int_a^x f(s)\left\{\int_s^x K(x,s)K(t,s)dt\right\}ds=\int_a^x K_2(x,s)f(s)ds,$$

мұндағы, $K_2(x,s)=\int\limits_a^x K(x,t)K(t,s)dt$. Жалпы жағдайда, $\mathrm{K}^n f=\int\limits_a^b K_n(x,s)f(s)ds$, мұндағы, $K_n(x,s)=\int\limits_a^x K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt$.

Енді $K_1(x,s)=K(x,s)$ деп алып,

$$K_1(x,s)+\lambda K_2(x,s)+\ldots+\lambda^{n-1}K_n(x,s)+\ldots$$

түзілген қатарды қарастырайық. $M=\max\limits_{x,s}|K(x,s)|$ екенін ескертіп,

$$|K_2(x,s)|\le\int\limits_s^x|K(x,t)K_1(t,s)|ds\le M^2(x-s),$$

$$|K_3(x,s)|\le\frac{M^3(x-s)^2}{2!},\ldots,\ |K_n(x,s)|\le\frac{M^n(x-s)^{n-1}}{(n-1)!},\ldots$$

теңсіздіктерін аламыз. Бұл алынған теңсіздіктерден қатар λ санының кез келген мәнінде бірқалыпты жинақты, оның қосындысы x,s аргументтері бойынша үзіліссіз функция екенін көреміз. Қатардың қосындысы $R(x,s;\lambda)$ деп белгілесек, $R(x,s;\lambda)=K_1(x,s)+\lambda K_2(x,s)+\ldots+\lambda^{n-1}K_n(x,s)+\ldots$ өрнегін Вольтерра теңдеуі ядросының резольвентасы деп атаймыз.

Жоғарыдағы K^n үшін алынған өрнектерді пайдаланып, $\varphi_n(x)$ функцияларын

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\mathrm{K}f+\lambda^2\mathrm{K}^2f+\ldots+\lambda^n\mathrm{K}^nf=$$
$$=f(x)+\lambda\int\limits_a^x\left[K_1(x,s)+\lambda K_2(x,s)+\ldots+\lambda^{n-1}K_n(x,s)\right]f(s)ds,\ n=1,2,\ldots$$

түрінде жазамыз. Бұл өрнектен $n\to\infty$ болғанда шекке көшіп,

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^x R(x,s;\lambda)f(s)ds \qquad (35)$$

интегралдық теңдеудің шешімін аламыз.

Мысал. Біртіндеп жуықтау әдісімен мына Вольтерраның 2-текті

$$\varphi(x)=3\int\limits_0^x(x-s)\varphi(s)ds+x-x^3$$

интегралдық теңдеуінің шешімін табайық.

Шешуі. Бастапқы жуық шешімін $\varphi_0(x)=x-x^3$ деп алсақ, онда

$$\varphi_1(x)=x-3\cdot\frac{3!}{5!}x^5,\ \varphi_2(x)=x-3^2\cdot\frac{3!}{7!}x^7,\ldots,\varphi_n(x)=x-3^n\cdot\frac{3!}{(2n+3)!}x^{2n+3},\ldots,$$

яғни шешім түрі

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=x-\lim_{n\to\infty}\frac{3^n n!}{(2n+3)!}x^{2n+3}=x$$

болады.

7 теорема. Егер $K(x,s)\in C(D)$ және $f(x)\in C[a,b]$ болса, онда Вольтерра теңдеуінің кез келген λ үшін (35) түріндегі бір ғана шешімі бар болады.

$\overline{R}(x,s;\lambda)$ резольвентасы мына $\overline{R}(x,s;\lambda)=K(x,s)+\lambda\int_s^x K(x,t)\overline{R}(t,s;\lambda)dt$ интегралдық теңдеуін қанағаттандырады. Расында,

$$\overline{R}(x,s;\lambda)=K(x,s)+\lambda K_2(x,s)+\ldots+\lambda^{n-1}K_n(x,s)+\ldots=$$
$$=K(x,s)+\lambda\int_s^x K(x,t)[K_1(t,s)+\lambda K_2(t,s)+\ldots]dt=K(x,t)+\lambda\int_s^x K(x,t)\overline{R}(t,s;\lambda)dt.$$

Біз $K(x,s)$ пен $f(x)$ функциялары өз аргументтері бойынша үзіліссіз функциялар деп ұйғарып, (34) интегралдық теңдеуінің жалғыз ғана шешімі бар екенін көрсетейік. Әрине K мен f функцияларына қойылатын шарттарды жеңілдетуге болады.

8 теорема. Ядро $K(x,s)\in L_2(D)$ және $f(x)\in L_2[a,b]$ болсын. Онда (34) интегралдық теңдеуінің кез келген λ үшін бір ғана $\varphi(x)\in L_2[a,b]$ шешімі бар болады. Ол шешім (35) өрнегімен анықталады.

Бұл тұжырым алдыңғы теорема секілді дәлелденеді. Ал мұндағы $R(x,s;\lambda)$ резольвентасы λ бойынша бүтін функция ретінде

$$R(x,s;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(x,s).$$

$D=\{a\le x,s\le b\}$ облысының барлық нүктелерінде дерлік жинақталатын қатардың қосындысы болады.

1 мысал. Вольтерраның 2-текті теңдеуі үшін $K(x,t)=\dfrac{1+\cos 2x}{\cos^2 s}$ ядросының резольвентасын табайық.

Резольвентаны табу үшін алдымен қайталанған ядроларды есептейік:

$$K_1(s,x)=K(s,x)=\frac{1+\cos 2x}{\cos^2 s},\quad K_2(x,s)=\int_s^x K(x,t)K_1(t,s)dt=\frac{2(x-s)}{1!}\cdot\frac{1+\cos 2x}{\cos^2 s},$$

$$K_3(x,s)=\int_s^x K(x,t)K_2(t,s)dt=2^2\cdot\frac{(x-s)^2}{2!}\cdot\frac{1+\cos 2x}{\cos^2 s},\ \dots,$$

$$K_n(x,s)=2^{n-1}\cdot\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{1+\cos 2x}{\cos^2 s},\dots.$$

Демек, резольвента формуласы бойынша

$$R(x,s;\lambda)=\frac{1+\cos 2x}{\cos^2 s}\left[1+\lambda\cdot\frac{2(x-s)}{1!}+\lambda^2\cdot\frac{2^2(x-s)^2}{2!}+\dots+\lambda^{n-1}\cdot\frac{2^{n-1}(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}+\dots\right]=$$
$$=\frac{1+\cos 2x}{\cos^2 s}\cdot e^{2\lambda(x-s)}.$$

2 мысал. Резольвентаны пайдаланып

$$\varphi(x)=e^{5x}+3\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(x)dt$$

интегралдық теңдеуін шешейік.

Шешуі. Алдымен бұл теңдеу үшін қайталанған ядроларды табамыз:

$$K_1(x,s)=K(x,s)=e^{2(x-s)},\ K_2(x-s)=\int_s^x e^{2(x-t)}e^{2(t-s)}dt=e^{2(x-s)}\frac{(x-s)}{1!},$$

$$K_3(x,s)=e^{2(x-s)}\frac{(x-s)^2}{2!},\dots,K_n(x,s)=e^{2(x-s)}\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!},\dots.$$

Демек,

$$R(x,s;\lambda)=e^{2(x-s)}\left[1+3\frac{(x-s)}{1!}+3^2\frac{(x-s)^2}{2!}+\dots+3^{n-1}\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\right]=e^{5(x-s)}.$$

Енді (35) формуласын пайдалансақ, берілген теңдеудің шешімі

$$\varphi(x)=e^{5x}+3\int_0^x e^{5(x-s)}e^{5s}ds=(1+3x)e^{5x}.$$

Ескерту. 7 теоремадан біртекті интегралдық

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)\varphi(x)ds$$

теңдеуінің барлық λ үшін тек қана $\varphi(x)=0$ шешімі бар болады.

1. Вольтерра типіндегі интегралдық теңдеулердің

$$\varphi_i(x)=f_i(x)+\lambda\sum_{j=1}^n\int_a^x K_{ij}(x,s)\varphi_j(s)ds,\quad i=1,2,\dots,m$$

жүйесіне қысып бейнелеу әдісін қолдануға болады. Бұл жүйенің біртіндеп жуықтау арқылы алынған шешімі кез келген λ мен $x \in [a,b]$ мәндерінде жинақты. Егер $K_{ij}(x,s) \in C(D)$ және $f_i(x) \in C[a,b]$ болса, онда жүйенің шешімдері $\varphi_i(x) \in C[a,b]$ болады.

Жоғарыдағы біртіндеп жуықтау әдісі көп аргументті функциялардың интегралдық теңдеулері үшін де қолданылады. Мәселен, екі аргументті функция үшін

$$\varphi(x,y) = f(x,y) + \lambda \int_a^x \int_c^y K(x,y;s,t)\varphi(s;t)\,dsdt$$

интегралдық теңдеуіне айтылған әдісті қолдануға болады. Ал λ параметрі бойынша жіктеліп, ол λ-ның кез келген мәнінде жинақты болатын жоғарыдағы жағдай тек осы интегралдық теңдеуді шешуде емес, одан күрделі, мәселен, теңдеудің оң жағында тек екі еселі екі одан басқа бірөлшемді интегралдар да бар интегралдық теңдеуге, мысалы,

$$\varphi(x,y) = f(x,y) + \lambda \int_a^x K_1(x,y;s)\varphi(y,s)\,ds +$$

$$+ \lambda \int_c^y K_2(x,y;s)\varphi(x,s)\,ds + \lambda^2 \int_a^x \int_c^y K_3(x,y;s,t)\varphi(s,t)\,dsdt$$

типтес теңдеуге қолдануға болады

Дәл осылай, жоғарыда айтылған әдіспен

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\omega(x)}^x K(x,t)\varphi(t)\,dt$$

және

$$\varphi(x,y) = f(x,y) + \lambda \int_{\omega_1(x)}^x \int_{\omega_2(y)}^y K(x,y;s,t)\varphi(s,t)\,dsdt$$

интегралдық теңдеулерінің шешілетінін және олардың жалғыз шешімі бар екенін дәлелдеуге болады. Мұнда, $a \le \omega_1(x) \le x$ және $c \le \omega_2(y) \le y$.

2. *Сызықтық емес интегралдық теңдеулер.* Мына түрдегі сызықтық емес фредгольмдік

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s;\varphi(s))\,ds + f(x) \tag{36}$$

теңдеуін қарастыралық, мұндағы $K(x,s;z)$ функциясы $a \le x,s < b,\ -\infty < z < \infty$ облысында үзіліссіз және $f(x) \in C[a,b]$. Бұл шарттарға қосымша $K(x,s;z)$

функциясы үшінші аргументі бойынша Липшиц шартын: $|K(x,s;z_1)-K(x,s;z_2)|\le N|z_1-z_2|$ қанағаттандырсын (N тұрақты сан).

$$\mathrm{K}\varphi=\lambda\int_a^b K(x,s;\varphi(s))ds+f(x)$$

деп белгілейік. K оператор толық метрикалық кеңістік $C[a,b]$-ны қайтадан өзіне бейнелейді. $\varphi_1(x)$ мен $\varphi_2(x)$ функциялар $C[a,b]$ кеңістігінен болсын. Олай болса,

$$|\mathrm{K}\varphi_2-\mathrm{K}\varphi_1|=\left|\lambda\int_a^b K(x,s;\varphi_2)-K(x,s;\varphi_1)ds\right|\le|\lambda|N|b-a|\max_{a\le s\le b}|\varphi_2(s)-\varphi_1(s)|$$

немесе $\rho(\mathrm{K}\varphi_2,\mathrm{K}\varphi_1)\le|\lambda|N|b-a|\rho(\varphi_2,\varphi_1)$ теңсіздігі орынды. Демек, егер $|\lambda|<\dfrac{1}{N|b-a|}$ болса, онда K қысу операторы болады. Олай болса, жоғарыдағы Банах теоремасы бойынша (36) түріндегі интегралдық теңдеудің $|\lambda|<\dfrac{1}{N|b-a|}$ мәндерінде бір ғана үзіліссіз шешімі болады. Ол шешім жоғарыдағыдай біртіндеп жуықтау әдісімен

$$\varphi_{n+1}(x)=\lambda\int_a^b K(x,s;\varphi_n(s))ds+f(x),\quad n=0,1,2,\ldots.$$

анықталады, мұндағы $\varphi_0(x)$ шешім функциясын $C[a,b]$ кеңістігінен қалаған түрде алуға болады.

Вольтерраның 2-текті сызықтық емес интегралдық теңдеуін

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x K(x,s;\varphi(s))ds+f(x) \tag{37}$$

қарастырайық. $\varphi_0(x)$ ретінде $[a,b]$ кесіндіде анықталған кез келген үзіліссіз функцияны алайық. $\varphi_0(x)$ функциясын (37) теңдеудің оң жағына қойып және

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,s;\varphi_0(s))ds$$

деп белгілеп, одан кейін

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,s;\varphi_1(s))ds$$

өрнегін түземіз; дәл осылай, жалпы түрде

$$\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,s;\varphi_n(s))ds,\ldots,\ (n=0,1,2,\ldots).$$

Демек, біз $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ түріндегі үзіліссіз функциялардың ақырсыз тізбегін алдық. Енді осы тізбек $[a,b]$ кесіндіде (37) теңдеуінің үзіліссіз шешіміне жинақты болатынын көрсетуге болады.

Расында, $\varphi_n(x)$ функциясын

$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] \ldots + [\varphi_n - \varphi_{n-1}(x)]$ түрінде жазайық. Міне бұдан біз тізбектің жинақтылығын дәлеледеудің орнына $\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \ldots$қатарының бірқалыпты жинақтылығын дәлелдеу жеткілікті екенін көрсетеміз. Ол үшін $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)$ айырымын бағалайық:

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \le |\lambda| \int_a^x |K(x,s;\varphi_0)| ds \le |\lambda| N \int_a^x |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| ds$$

белгілеуін енгізіп, соңғы теңсіздікті

$$|\varphi_2 - \varphi_1| \le |\lambda| M_0 N \frac{|x-a|}{1!}$$

түрінде жазамыз. Дәл осылай,

$$|\varphi_3 - \varphi_2| \le |\lambda| N \int_a^x |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| ds \le |\lambda|^2 N^2 M_0 \int_a^x (s-a) ds \le |\lambda|^2 N^2 M_0 \frac{(x-a)^2}{2!},$$

олай болса, жалпы түрде:

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \le |\lambda|^n N^n M_0 \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Бұдан қатардың бірқалыпты жинақтылығын, яғни жуықтау тізбегінің шешімге жинақты екенін көреміз.